



دخترچه سوالات و پاسخ تشریحی مرحله دوم

بیست و چهارمین دوره المپیاد کامپیوتر سال ۱۳۹۴

| مدت آزمون (دقیقه) | تعداد سوالات | |
|----------------------|------------------|---------------------|
| | مسأله‌های تشریحی | سوالات چند گزینه‌ای |
| ۳۰۰ | ۸ | ۲۵ |

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

توضیحات مهم

تذکرات آزمون:

ضمن آرزوی موفقیت برای شما دانش‌پژوه گرامی، خواهشمند است قبل از پاسخ به سوالات آزمون به موارد زیر توجه کنید:

- این آزمون شامل ۲۵ سوال تستی و ۸ مسأله‌ی تشریحی و وقت آن ۳۰۰ دقیقه است.
- استفاده از ماشین‌حساب در این آزمون غیر مجاز است.
- همراه داشتن تلفن همراه (حتی خاموش) در طول زمان آزمون مجاز نیست.
- فقط داوطلبانی می‌توانند دفترچه‌ی سوالات را با خود ببرند که تا پایان آزمون در جلسه حضور داشته باشند.
- انتشار و بازتولید این سوالات توسط **کمیته‌ی اجرایی ماخ** انجام شده است.

- سوال‌های ۱۳ تا ۲۰ در چند دسته‌ی سوالی آمده‌اند و پیش از هر دسته توضیح مربوط به آن‌ها آمده است.
- نمره‌دهی به همه‌ی سوال‌ها یکسان می‌باشد. جواب درست به هر سوال ۴ نمره‌ی مثبت و جواب نادرست ۱ نمره‌ی منفی دارد.
- ترتیب گزینه‌ها در هر سوال به شکل تصادفی است.

۱- **ماه** افشین در یک خانه از جدول $n \times n$ ($n > 1$) قرار دارد و پیمان می‌خواهد او را دستگیر کند. در هر گام افشین باید به یکی از خانه‌های مجاور (مجاور ضلعی) محلی کنونی‌اش که مسدود نشده باشد، برود. پیمان نیز در گام می‌تواند یک خانه را انتخاب کند و همه‌ی خانه‌های هم‌سطر و هم‌ستون آن را مسدود کند. افشین در دو صورت زیر دستگیر می‌شود:

- در نوبت خود نتواند حرکت کند (تمام خانه‌های مجاورش مسدود شده‌باشد).
- پیمان محلی که افشین در آن قرار دارد را مسدود کند.

اگر پیمان نتواند محل افشین در جدول را ببیند، حداقل چند خانه باید انتخاب کند تا مطمئن باشد افشین را دستگیر کرده است؟

- الف) $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ (ب) $n-1$ (ج) n (د) $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ (ه) $\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$

۲- **ماه** اعداد $1, 2, \dots, n$ را در نظر بگیرید. دو نفر بازی زیر را انجام می‌دهند: هرکس در نوبت خود عدد $1 \leq i \leq n$ را انتخاب می‌کند و سپس i و تمام مضارب آن (که از n بیشتر نیستند) را روی تخته می‌نویسد. هر عدد باید حداکثر k

بار نوشته شود. کسی که در نوبت خود نتواند عددی انتخاب کند (برای هر عدد i خود i یا حداقل یکی از مضاربش k بار نوشته شده باشد)، می‌بازد. فرض کنید $n = 2014$ است. به ازای چند مقدار k از بین مجموعه‌ی اعداد $\{13, 21, 34, 55\}$ نفر اول می‌تواند برنده‌ی بازی باشد؟

- الف) ۴ (ب) ۱ (ج) ۲ (د) ۳ (ه) ۰

۳- **ماه** دنبالی $\langle a_1, a_2, \dots, a_{1392} \rangle$ شامل ۱۳۹۲ عدد متمایز داده شده است. یک جادوگر قادر است در یک چشم برهم زدن ۶۹۶ عدد متوالی از این دنباله را به طور صعودی مرتب کرده و بر روی مکان‌های همان ۶۹۶ عدد از کوچک به بزرگ (صعودی) بگذارد. می‌خواهیم با تعدادی درخواست از جادوگر اعداد را از کوچک به بزرگ مرتب کنیم. هر درخواست بدین شکل است که از جادوگر می‌خواهیم از عدد i ام تا عدد $i+695$ ام که در مجموع ۶۹۶ عدد می‌شود را مرتب کند (عدد i می‌تواند حداقل ۱ و حداکثر ۶۹۷ باشد). با حداقل چندبار درخواست از جادوگر می‌توان اعضای دنباله را مرتب کرد؟

- الف) ۳ (ب) ۱۳۹۲ (ج) ۶ (د) $\left\lfloor \log_3 1392 \right\rfloor$ (ه) ۴

۴- **ماه** سلطان در ابتدا ۰ را روی تخته نوشته است. در هر مرحله اگر عدد x روی تخته نوشته شده باشد، او می‌تواند آن را با یکی از اعداد $3x$ و $9x + 5$ جای‌گزین کند. به ازای چند تا از اعداد ۰ تا ۵۰۰، سلطان می‌تواند پس از تعداد متناهی گام، به آن عدد برسد؟

- الف) ۶۴ (ب) ۲۵۰ (ج) ۱۶۹ (د) ۲۳۹ (ه) ۴۰۸

۵- جدولی $n \times n$ در نظر بگیرید. به یک خانه از این جدول ناسازگار می‌گوییم اگر بتوان تمام خانه‌های جدول به جز این خانه را با بلوک‌های 1×3 پوشاند (بلوک‌ها نباید هم‌پوشانی داشته باشند و از جدول بیرون بزنند).

برای $n = 5$ و $n = 7$ تعداد خانه‌های ناسازگار به ترتیب (از راست به چپ) چند است؟

- الف) ۱ و ۱۷ (ب) ۱ و ۹ (ج) ۹ و ۴۹ (د) ۹ و ۹ (ه) ۹ و ۱۷

۶- جایگشت a_1, a_2, \dots, a_n از اعداد $1, 2, \dots, n$ را «سه‌گریز n تایی» می‌گوییم هرگاه $1 \leq i \leq n$ وجود نداشته باشد که $\sum_{j=1}^i a_j$ بر ۳ بخش‌پذیر باشد. تعداد جایگشت‌های سه‌گریز ۷ تایی و ۸ تایی به ترتیب (از راست به چپ) چند است؟

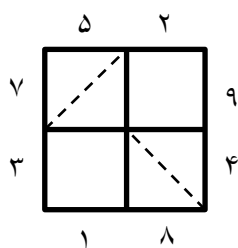
- الف) ۳۶۰ و ۰ (ب) ۳۶۰ و ۱۵۱۲ (ج) ۴۸۰ و ۱۵۱۲ (د) ۴۸۰ و ۰ (ه) ۴۸۰ و ۴۸۰

۷- جایگشت a_1, a_2, \dots, a_n از اعداد $1, 2, \dots, n$ را «سه‌گریز پیشرفته n تایی» می‌گوییم هرگاه دو شرط زیر را داشته باشد:

- $1 \leq i \leq n$ وجود نداشته باشد که $\sum_{j=1}^i a_j$ باقی‌مانده‌اش بر ۳ برابر یک باشد.
- جمع هر ۶ عدد متوالی بر ۳ بخش‌پذیر باشد.

تعداد جایگشت‌های سه‌گریز پیشرفته‌ی ۹ تایی چند است؟

- الف) $9 \times 3!^3$ (ب) $4 \times 3!^3$ (ج) $8 \times 3!^3$ (د) ۰ (ه) $27 \times 3!^3$



۸- در جدول روبه‌رو می‌توانیم با کشیدن هر یک از دو قطر هر خانه، یک آینه‌ی دو طرفه در آن خانه قرار دهیم. در واقع برای هر خانه سه حالت متصور است. یا آینه‌ای درون آن نیست و

یا این‌که یکی از قطرهای آن کشیده شده است. برای مثال در

شکل روبه‌رو دو آینه که با خط‌چین مشخص شده‌اند در جدول وجود دارند. به ازای هر وضعیت جدول، مقدار آن وضعیت به این صورت تعیین می‌شود که هر دو عددی که همدیگر را می‌بینند

(با توجه به آینه‌ها) در هم ضرب می‌کنیم و مجموع این حاصل ضرب‌ها، مقدار آن وضعیت جدول را مشخص می‌کند (دید اعداد به گونه‌ای است که در صورتی که آینه‌ای وجود نداشته باشد هر عددی، عدد مقابل خود را می‌بیند). برای مثال مقدار وضعیت روبه‌رو به این صورت محاسبه می‌شود: $1 \times 9 + 3 \times 8 + 2 \times 4 + 5 \times 7 = 76$.

کم‌ترین مقداری که می‌توان با کمک آینه‌ها برای این جدول به دست آورد چند است؟

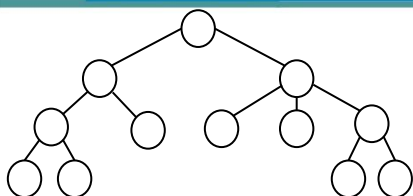
- الف) ۷۰ (ب) ۶۹ (ج) ۶۷ (د) ۶۸ (ه) ۶۶

۹- در یک گراف فاصله‌ی بین دو رأس طول کوتاه‌ترین مسیر بین آن دو رأس است. قطر یک گراف بیش‌ترین فاصله‌ی بین هر دو رأس از آن گراف می‌باشد. حال مجموعه‌ی تمام درخت‌های متمایز ۷ رأسی با رأس‌های $1, 2, \dots, 7$ را در نظر بگیرید

(دو درخت متمایزند اگر و فقط اگر دو رأس مانند i, j وجود داشته باشند که یال $[i, j]$ در یکی وجود داشته باشد و در دیگری نباشد). فرض کنید که می‌خواهیم با اضافه کردن تعدادی یال به این مجموعه یک درخت بزرگ ایجاد کنیم. کم‌ترین قطر ممکن

برای این درخت چند است؟

- الف) ۱۳ (ب) ۸ (ج) ۹ (د) ۱۲ (ه) ۷



۱۰- درخت روبه‌رو را در نظر بگیرید. می‌خواهیم اعداد $1, 2, \dots, 12$ را در رأس‌های این درخت قرار دهیم به طوری که عدد هر رأس از اعداد فرزندان آن بیش‌تر باشد. به چند حالت این کار امکان‌پذیر است؟

الف) ۲۹۵۶۸

ب) ۸۸۷۰۴۰

ج) ۷۳۹۲۰۰

د) ۴۴۳۵۲۰

ه) ۱۴۷۸۴۰

۱۱- خیکوله یک دستمال کاغذی 4×4 پیدا کرده است و ۱۶ پوست پسته جمع کرده است که i امین آن‌ها در i ثانیه می‌سوزد. او می‌خواهد پوست پسته‌ها را روی خانه‌های دستمال کاغذی بگذارد و خانه‌ی بالا سمت راست آن را آتش بزند تا کل دستمال کاغذی بسوزد. نحوه‌ی سوختن دستمال کاغذی به این نحو است:

- هر وقت یک خانه‌ی دستمال کاغذی آتش گرفت، اگر روی آن خانه یک پوست پسته باشد که در t ثانیه می‌سوزد، بعد از t ثانیه آن خانه می‌سوزد و خانه‌های مجاور ضلعی‌اش (در صورتی که قبلاً آتش نگرفته باشند) آتش می‌گیرند.
- حال خیکوله می‌خواهد طوری پوست پسته‌ها را روی جدول بچیند که در هر خانه یک پوست پسته قرار بگیرد و کل دستمال کاغذی در کم‌ترین زمان ممکن بسوزد. این کم‌ترین زمان چقدر است؟

الف) ۲۶

ب) ۲۵

ج) ۲۹

د) ۲۸

ه) ۲۷

۱۲- اعداد $\{2^i \mid 0 \leq i \leq 9\}$ روی تخته نوشته شده‌اند. مولین و مرلون بازی زیر را انجام می‌دهند: در هر مرحله بازکنی که نوبت اوست، دو عدد x و y را انتخاب می‌کند و بعد از پاک کردن آن‌ها عدد $\left\lfloor \frac{x+y}{2} \right\rfloor$ یا $\left\lceil \frac{x+y}{2} \right\rceil$ را روی تخته می‌نویسد و این روند ادامه می‌یابد تا فقط یک عدد باقی بماند. هدف مولین بیشینه کردن این عدد و هدف مرلون کمینه کردن آن است. اگر هر دو بازیکن بهترین بازی خود را انجام دهند و مولین شروع کننده‌ی بازی باشد و عدد نهایی برابر p باشد، باقی‌مانده‌ی p بر ۵ برابر چند است؟

الف) ۲

ب) ۰

ج) ۱

د) ۳

ه) ۴

۱۳- ۴۰ توپ را در ۵ جعبه با شماره‌های ۱, ۲, ۳, ۴, ۵ قرار می‌دهیم (جعبه‌ها می‌توانند خالی هم باشند). عمل «وسط به دو طرف» عملی است که در طی آن دو توپ از جعبه‌ی $2 \leq i \leq 4$ (در صورت وجود) خارج می‌شوند و یکی از آن‌ها به جعبه‌ی $i-1$ و یکی به جعبه‌ی $i+1$ می‌رود.

----- باتوجه به توضیحات بالا به ۳ سؤال زیر پاسخ دهید -----

۱۳- تعداد راه‌های قراردادن توپ‌ها در جعبه‌ها به نحوی که تعداد توپ‌های جعبه‌ی اول با جعبه‌ی پنجم و جعبه‌ی دوم با جعبه‌ی چهارم برابر باشد، در کدام یک از بازه‌های زیر قرار می‌گیرد؟

الف) $[0, 200]$

ب) $[800, +\infty)$

ج) $[400, 600]$

د) $[600, 800]$

ه) $[200, 400]$

۱۴- ماه به حالتی از قرارگیری توپ‌ها در سبد حالت «گوشه‌گیر» می‌گوییم اگر با انجام تعدادی عمل وسط به دو طرف از آن حالت به حالتی برسیم که تمام توپ‌ها در جعبه‌ی اول و آخر قرار بگیرند. تعداد حالت‌های گوشه‌گیر چند است؟

الف) تعداد حالت‌هایی که تعداد توپ‌های جعبه‌ی اول با جعبه‌ی پنجم و جعبه‌ی دوم با جعبه‌ی چهارم برابر باشد.

ب) صفر

ج) ۴۱

د) ۴۰

ه) تعداد حالت‌هایی که مجموع توپ‌های خانه‌های دوم و سوم و چهارم زوج باشد.

۱۵- ماه به حالتی از قرارگیری توپ‌ها «بی‌حکمی» می‌گوییم اگر نتوان هیچ عمل وسط به دو طرفی روی آن انجام داد. با شروع از یک حالت دلخواه حداکثر چند مرحله طول می‌کشد تا به یک وضعیت بی‌حرکت برسیم.

ه) ۷۸

د) ۷۵

ج) ۷۷

ب) ۸۰

الف) ۷۹

ده نفر با شماره‌های ۱، ۲، ...، ۱۰ در صف یک بانک قرار دارند که سه باجه برای انجام امور متقاضیان دارد. در ابتدا همه‌ی باجه‌ها خالی هستند. با شروع از فرد شماره ۱، هر کس به اولین باجه خالی می‌رود و هرگاه کار کسی در باجه‌ای تمام شد، بلافاصله نفر اول صف جایگزین او می‌شود. علاوه بر این، کار هر نفر حداقل یک ثانیه طول می‌کشد و هیچ دو نفری دقیقاً همزمان باجه‌ها را ترک نمی‌کنند. پس از اتمام کار نفر دهم این فرآیند پایان می‌یابد. در این فرآیند دو نفر را «همزمان» می‌گوییم اگر لحظه‌ای وجود داشته باشد که در آن هر دو در حال انجام کار در باجه‌ها باشند. «وزن» یک زوج را برابر با قدر مطلق تفاضل شماره‌های این دو نفر فرض می‌کنیم.

----- با توجه به توضیحات بالا به ۴ سؤال زیر پاسخ دهید -----

۱۶- ماه اگر $\{2, 6\}$ و $\{3, 7\}$ دو زوج همزمان باشند، چند تا از زوج‌های زیر نمی‌توانند همزمان باشند؟

$\{7, 1\}, \{9, 6\}, \{7, 4\}, \{4, 3\}, \{8, 2\}, \{5, 1\}$

ه) ۵

د) ۲

ج) ۳

ب) ۱

الف) ۴

۱۷- ماه کم‌ترین و بیش‌ترین مقدار ممکن برای تعداد زوج‌های همزمان به ترتیب چند است؟

ه) ۱۹ و ۱۰

د) ۲۴ و ۱۷

ج) ۲۴ و ۱۹

ب) ۲۴ و ۱۰

الف) ۱۷ و ۱۷

۱۸- ماه کم‌ترین و بیش‌ترین مقدار ممکن برای مجموع وزن زوج‌های همزمان به ترتیب چند است؟

ه) ۸۱ و ۲۴

د) ۸۰ و ۲۴

ج) ۸۱ و ۲۳

ب) ۸۰ و ۲۵

الف) ۸۱ و ۲۵

۱۹- اگر $\{2,5\}$ و $\{4,8\}$ و $\{6,9\}$ سه زوج همزمان باشند، این افراد به چند ترتیب مختلف می‌توانند در باجه‌ها قرار گیرند؟ (دو ترتیب مختلف محسوب می‌شوند، اگر و فقط اگر زوجی وجود داشته باشد که در یکی همزمان باشند و در دیگری همزمان نباشند.)

الف) ۱۶ (ب) ۱۴۴ (ج) ۷۲ (د) ۲۴ (ه) صفر

جدولی $n \times n$ داریم (طول ضلع n است) که هر واحد ضلع آن یک چوب کبریت است. ما هر بار زیرمجموعه‌ای از چوب کبریت‌ها (این زیرمجموعه می‌تواند تهی باشد) را بر می‌داریم و سپس تعداد مسیرهای ممکن از گوشه‌ی پایین چپ به بالا راست (فقط با حرکات راست و یا بالا) را می‌شماریم. پس از این کار چوب کبریت‌ها را به حالت اولیه برمی‌گردانیم و دوباره زیرمجموعه‌ای جدید را حذف می‌کنیم.

----- با توجه به توضیحات بالا به ۳ سوال زیر پاسخ دهید -----

۲۰- فرض کنید $n = 3$ است. به ازای تمام زیرمجموعه‌های ممکن از چوب کبریت‌ها حرکت بالا را انجام داده و عدد نهایی را روی تخته نوشته‌ایم. در نهایت روی تخته چند عدد مختلف وجود دارد؟

الف) ۱۸ (ب) ۲۰ (ج) ۱۹ (د) ۲۱ (ه) ۱۶

۲۱- فرض کنید $n = 4$ است. تنها زیرمجموعه‌هایی از چوب کبریت‌ها را در نظر بگیرید که تعداد مسیرهای معتبرشان برابر ۶۰ است. این بار به ازای هر کدام از این زیرمجموعه‌ها تعداد چوب کبریت‌های حذف شده را روی تخته می‌نویسیم. کمینه و بیشینه عددی که روی تخته نوشته شده چند است؟

الف) ۱۰،۲ (ب) ۲۸ (ج) هیچ حالتی ۶۰ مسیر معتبر ندارد. (د) ۱،۱۰ (ه) ۱،۸

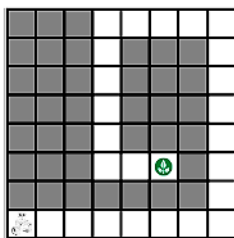
۲۲- فرض کنید $n = 5$ است. به ازای چند تا از اعداد مجموعه‌ی $\{32, 64, 128, 256, 512\}$ می‌توان چوب کبریت‌ها را به شکلی حذف کرد که تعداد مسیرهای معتبر برابر با آن عدد شود؟

الف) ۳ (ب) ۲ (ج) ۵ (د) ۴ (ه) ۱

جدولی $n \times n$ ($n > 1$) داریم که یک ربات در گوشه‌ی پایین چپ آن قرار دارد. این ربات یک برنامه دریافت کرده و آن را دستور به دستور اجرا می‌کند و هر بار پس از انجام آخرین دستور دوباره به دستور اول بازمی‌گردد و همین کار را تکرار می‌کند. دستورات این برنامه می‌تواند شامل چهار حرکت (بالا، پایین، چپ و راست) باشد که روبات در صورت امکان آن‌ها را انجام می‌دهد و در غیر این صورت (در صورتی که از جدول خارج شود و یا به خانه‌ی غیرمجاز هدایت شود) به سراغ دستور بعدی می‌رود. فرض کنید طول یک برنامه تعداد دستورهای آن است.

----- با توجه به توضیحات بالا به ۳ سوال زیر پاسخ دهید -----

۲۳- ماگ جدول زیر را در نظر بگیرید. خانه‌های خاکستری غیرمجاز هستند. طول کوتاه‌ترین برنامه‌ای که ربات با اجرای آن حداقل یک‌بار به خانه‌ی هدف (انتهای مسیر سفید) می‌رسد، چند است؟



- الف) ۱۸ ب) ۲۵ ج) ۲۳ د) ۲۰ ه) ۲۱

۲۴- ماگ فرض کنید تمام خانه‌های جدول مجاز هستند. می‌خواهیم برنامه‌ای به ربات دهیم تا تمامی خانه‌های جدول را حداقل یک‌بار ببیماید (مهم نیست ربات در انتها در کدام خانه است). طول کوتاه‌ترین برنامه با این هدف برای $n = 10$ چند است؟

- الف) ۱۹ ب) ۱۱ ج) ۹ د) ۱۰ ه) ۱۵

۲۵- ماگ خانه‌ای را در جدول خوب می‌نامیم که اگر تنها آن خانه غیرمجاز باشد، برنامه‌ای به طول حداکثر $3n$ وجود داشته باشد که تمام خانه‌های مجاز را ببیماید. برای $n = 7$ چند خانه‌ی خوب در جدول وجود دارد؟ (خانه‌ی محل استقرار ربات یعنی خانه‌ی گوشه‌ی چپ پایین خوب نیست.)

- الف) ۴۸ ب) ۲۲ ج) ۲۳ د) ۴۳ ه) ۱۱

۱- بازی رنگی (۴۰ نمره)

دیروز بیعی و گاوی پس از چریدن طولانی خسته شدند و تصمیم گرفتند یک بازی انجام دهند. در این بازی ۳ دایره وجود دارد که هر یک به $3n$ قطاع برابر تقسیم شده‌اند. ابتدا بیعی هر یک از قطاع‌های دایره‌ی شماره‌ی ۱ را با یکی از رنگ‌های زرد، نارنجی و بنفش رنگ می‌کند. گاوی پس از دیدن رنگ‌آمیزی بیعی، هر یک از قطاع‌های دایره‌ی شماره‌ی ۲ را با یکی از همین سه رنگ، رنگ می‌کند. بیعی نیز پس از دیدن رنگ‌آمیزی گاوی، دایره‌ی شماره‌ی ۲ را روی دایره‌ی شماره‌ی ۱ می‌گذارد و آن را به هر مقداری که می‌خواهد، می‌چرخاند به طوری که هر قطاع آن بر قطاعی از دایره‌ی شماره‌ی ۱ منطبق شود. حال دایره‌ی شماره‌ی ۳ روی دو دایره‌ی دیگر گذاشته می‌شود، طوری که هر قطاع آن بر قطاعی از دایره‌های زیرین منطبق شود. پس از این کار هر قطاع دایره‌ی شماره‌ی ۳ به صورت زیر رنگ می‌شود:

- اگر رنگ دو قطاع زیرین دایره‌های شماره‌ی ۱ و ۲ یکسان بود، این قطاع را نیز به همان رنگ درمی‌آوریم.
- اگر رنگ دو قطاع زیرین یکسان نبود، رنگ این قطاع را به رنگ سوم (رنگی که در دو قطاع زیرین نیامده است) درمی‌آوریم.

گاوی اصلیتی هلندی دارد و به همین دلیل به رنگ نارنجی بسیار علاقمند است و می‌خواهد تا حد ممکن تعداد قطاع‌های نارنجی دایره‌ی شماره‌ی ۳ زیاد شود؛ درحالی که بیعی می‌خواهد از این کار جلوگیری کند.

- الف) ثابت کنید گاوی می‌تواند طوری بازی کند که دایره‌ی شماره‌ی ۳ در انتها حداقل n قطاع نارنجی داشته باشد. (۲۰ نمره)
- ب) ثابت کنید بیعی می‌تواند طوری بازی کند که دایره‌ی شماره‌ی ۳ در انتها حداکثر n قطاع نارنجی داشته باشد. (۲۰ نمره)

۲- وزنه‌ها و ماشین جادویی (۵۰ نمره)

بیعی $3n - 2$ وزنه‌ی یک گرمی و دو وزنه‌ی نیم گرمی دارد که همگی از نظر ظاهری کاملاً شبیه به هم هستند ($n > 2$). وزنه‌ها با شماره‌های ۱ تا $3n$ شماره‌گذاری شده‌اند، ولی وزن هیچ وزنه‌ای را نمی‌دانیم. گاوی یک ماشین جادویی دارد. در هر بار استفاده از ماشین جادویی، گاوی می‌تواند ۲ وزنه را روی ماشین جادویی‌اش قرار دهد و ماشین جادویی به او می‌گوید که آیا مجموع وزن این دو وزنه، عددی طبیعی است یا خیر.

- الف) ثابت کنید گاوی همواره می‌تواند با حداکثر $2n - 1$ بار استفاده از ماشین جادویی خود یک وزنه‌ی نیم گرمی را پیدا کند. (۲۰ نمره)
- ب) ثابت کنید گاوی نمی‌تواند روشی ارائه دهد که با کمتر از $2n - 1$ بار استفاده از ماشین جادویی تضمین کند که یک وزنه‌ی نیم گرمی را می‌تواند پیدا کند. (۳۰ نمره)

۳- گاوی خسیس (۵۰ نمره)

کشوری که گاوی و بیعی در آن زندگی می‌کنند، دارای n شهر می‌باشد ($n > 2$). بین برخی از شهرهای کشور، جاده‌ی دوطرفه کشیده شده است. همچنین می‌دانیم بین هیچ دو شهری بیش از یک جاده وجود ندارد. از آن جایی که مردم این کشور صمیمی هستند، می‌دانیم در هر شهری که باشیم، با استفاده از جاده‌های این کشور می‌توانیم به هر شهر دیگر که بخواهیم، برسیم. ارزش یک شهر برابر است با تعداد شهرهایی که به طور مستقیم با یک جاده به آن شهر متصل هستند. بیعی در یکی از

شهرهای این کشور قرار دارد. گاوی که در شهر دیگری است، می‌خواهد به دیدن بیعی برود. می‌دانیم اگر گاوی در مسیر رفتن به شهر بیعی، از شهری با ارزش k عبور کند، باید k تومان عوارض بدهد (شهر آغاز و پایان مسیر نیز مشمول عوارض هستند). از آن جایی که گاوی دوست ندارد زیاد پول خرج کند، مسیری را انتخاب می‌کند که کمترین هزینه را داشته باشد.

الف) فرض کنید محل گاوی و بیعی مشخص باشد. ثابت کنید به ازای هر $n > 2$ می‌توان جاده‌های بین شهری را طوری قرارداد که گاوی مجبور باشد دست‌کم $3n - 5$ تومان به دولت عوارض بدهد. (۱۵ نمره)

ب) ثابت کنید به ازای هر $n > 2$ ، هر طوری جاده‌ها را قرار دهیم و بیعی و گاوی در هر دو شهری باشند، گاوی با حداکثر $3n - 5$ تومان می‌تواند به هدفش برسد. (۳۵ نمره)

۴- انتقال مهره‌های گاوی (۶۰ نمره)

نقاط صحیح صفحه مختصات (نقاطی که طول و عرض آن‌ها عددی صحیح است) را در نظر بگیرید. بیعی n نقطه از این نقاط را به رنگی آبی درآورده است و n مهره نیز در n نقطه‌ی دیگر از صفحه قرار داده است (در هر نقطه یک مهره). می‌دانیم نقاط آبی و مهره‌ها ویژگی‌های زیر را دارند:

- در هیچ نقطه‌ی آبی، مهره‌ای قرار ندارد.
- هیچ دو نقطه‌ی آبی در یک سطر نیستند.

بیعی و گاوی تصمیم می‌گیرند تا مهره‌ها را به نقاط آبی برسانند (هر مهره را در یک نقطه‌ی آبی قرار دهند). هر دو برای این کار یک ماشین مخصوص به خود دارند. ماشین گاوی در هر مرحله می‌تواند تعدادی از مهره‌ها (و یا هیچ مهره‌ای) را ثابت نگه دارد و بقیه را به‌طور همزمان یک واحد به بالا، چپ، راست یا پایین حرکت دهد. توجه کنید که جهت حرکت مهره‌های مختلف در یک مرحله می‌تواند باهم یکسان نباشد و همچنین پس از انجام یک مرحله ممکن است در یک خانه بیش از یک مهره قرار گیرد.

ماشین بیعی نیز مانند ماشین گاوی عمل می‌کند با این تفاوت که ماشین بیعی در یک مرحله نمی‌تواند بیش از یک مهره را در یک نقطه قرار دهد.

فرض کنید کمترین تعداد مراحل لازم برای رساندن مهره‌ها به نقاط آبی به طوری که در هر نقطه‌ی آبی یک مهره قرار گیرد، با استفاده از ماشین گاوی t_g و با استفاده از ماشین بیعی t_b باشد. ثابت کنید $t_g = t_b$.

توجه: شما با اثبات $t_g \leq 2t_b$ از نمره را می‌توانید بگیرید.

پاسخ سوالات تستی مرحله‌ی دوم بیست و چهارمین المپیاد کامپیوتر ایران

۱- گزینه ۴ درست است.

برای دستگیر کردن افشین، پیمان کفایت تا برای هر $1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ ، خانه‌ی $(2i, 2i)$ از جدول را انتخاب کند. در این صورت افشین یا در یک خانه‌ی مسدود است یا در خانه‌ای مجاور یک خانه‌ی مسدود، پس دستگیر می‌شود. علاوه بر این تعداد خانه لازم نیز می‌باشد زیرا در غیر اینصورت دو خانه‌ی مجاور هستند که هیچ کدام مسدود نشده‌اند و افشین می‌تواند بین آن دو به صورت متناوب حرکت کند.

۲- گزینه ۴ درست است.

به ازای اعداد فرد نفر اول و به ازای اعداد زوج نفر دوم استراتژی برد دارد. به ازای اعداد زوج: نفر دوم هر عددی که نفر اول انتخاب کرد را دوباره انتخاب می‌کند. در نتیجه همواره نفر دوم می‌تواند عدد انتخاب کند و نفر اول بالاخره خواهد باخت. به ازای عدد فرد: نفر اول ابتدا عدد ۱ را انتخاب می‌کند و در بازی جدید همانند نفر دوم در بازی قبل عمل خواهد کرد.

۳- گزینه ۳ درست است.

فرض کنید بزرگترین عدد در خانه اول و کوچکترین عدد در خانه ۱۳۹۲ ام باشد. هر کدام از این دو عدد برای آنکه ب ه مکان مطلوب خود برسند نیاز به سه درخواست دارند. فقط یک درخواست است که هر دو عدد فوق را شامل می‌شود. بنابراین حداقل ۵ درخواست برای آنکه کوچکترین و بزرگترین عدد به مکان مطلوب خود برسند نیاز داریم. با ۶ بار می‌توان بدین شکل اعداد را مرتب کرد. ابتدا نیمه اول و نیمه دوم را با دو درخواست مرتب می‌کنیم. سپس نیمه وسط (از عدد ۳۴۹ ام تا ۱۰۴۴ ام) را مرتب می‌کنیم. مجدد با دو درخواست دیگر نیمه اول و دوم را مرتب کرده و نهایتاً نیمه وسط را مرتب می‌کنیم. برای اثبات درستی الگوریتم فوق فرض کنید در ابتدا برای $i < j$ داشته باشیم $a_i > a_j$. می‌توان با حالت‌گیری نشان داد در یکی از درخواست‌ها حتما این دو عدد جابه‌جا می‌شوند.

۴- گزینه ۳ درست است.

شرط لازم برای رسیدن به یک عدد این است که در نمایش آن عدد در مبنای ۳، تمام ارقام ۲ سمت راست یک رقم ۱ باشند. زیرا تنها راه تولید رقم ۲ استفاده از عمل $9x + 5$ است که این خاصیت را دارد. دو عمل دیگر نیز یا یک صفر در سمت راست عدد قرار می‌دهند و یا سمت راست‌ترین رقم آن را حذف می‌کنند. حال فرض کنید a_n تعداد رشته‌های Π بینی در مبنای ۳ باشد که این خاصیت را دارند. این رشته‌ها را به دو دسته تقسیم می‌کنیم. دسته‌ی اول آن‌هایی که با ۰ شروع می‌شوند و دسته‌ی دوم آن‌هایی که با ۱. بدیهی است که تعداد رشته‌های دسته‌ی اول برابر a_{n-1} است. پس در کل داریم $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$. برای $n = 2$ هم داریم: $a_1 = 5$. به راحتی می‌توان مشاهده کرد تمام اعداد ۶ رقمی که در ایت خاصیت صدق می‌کنند، کمتر از ۵۰۰ می‌باشند پس تعداد این اعداد برابر است با $a_6 = 169$.

اما امکان ساخت این مقدار در جدول وجود ندارد. اما مقدار زیر را می‌توان ساخت که تنها یک واحد بیش‌تر است و خوب طبیعتاً جواب است

$$1 \times 8 + 2 \times 9 + 3 \times 7 + 4 \times 5 = 67$$

۹- گزینه ۲ درست است.

فرض کنید جواب مسأله مربوط به درخت T باشد. از روی T ، درخت T' را این‌گونه بسازید: هر درخت T رأسی را معادل یک رأس در نظر بگیرید و اگر بین دو رأس از دو درخت در T یالی بود، بین دو رأس متناظر آن دو در T' یک یال بگذارید. حال دو برگ از T' را در نظر بگیرید. فرض کنید این دو برگ معادل دو درخت T_1, T_2 از T باشند. فرض کنید رئوسی از T_1, T_2 که به بیرون از این دو درخت یال دارند، به ترتیب t_1 و t_2 باشند (چون T_1 و T_2 برگ هستند این رأس یکتاست). چون T_1 و T_2 درخت‌های ۷ رأسی هستند رئوسی مانند t'_1 و t'_2 وجود دارند که $d_T(t_1, t'_1) \geq 3$ و $d_{T_2}(t_2, t'_2) \geq 3$. حال به‌وضوح می‌توان دید که $d_T(t'_1, t'_2) \geq 8$. پس قطر T حداقل ۸ است. حال اگر T' را یک گراف ستاره‌ای در نظر بگیریم و به ازای هر یال مانند $T_1 T_2$ در T' ، مرکز درخت T_1 را به مرکز درخت T_2 در T متصل کنیم. با توجه به اینکه شعاع هر گراف ۷ رأسی حداکثر ۳ است، قطر گراف حاصل ۸ می‌شود. پس پاسخ مسأله برابر ۸ است.

شعاع گراف G برابر است با: $\min_{v \in V(G)} \{ \max_{w \in V(G)} d(v, w) \}$

۱۰- گزینه ۱ درست است.

ریشه درخت حتماً عدد ۱۲ است. حال کفایت ۵ عدد برای درخت سمت چپ در نظر بگیریم و ۶ عدد هم برای درخت سمت راست و به‌صورت بازگشتی مسأله را حل کنیم. در هر مرحله عدد روی ریشه به صورت یکتا مشخص می‌شود و بقیه اعداد باید در زیر درخت‌ها افزاز شوند. پاسخ نهایی برابر است با:

$$\binom{1}{5} \binom{3}{4} \binom{1}{2} \binom{3}{5} \binom{1}{2} \binom{1}{2} = 147840$$


۱۱- گزینه ۴ درست است.

برای سوختن خانه‌ی پایین سمت چپ حداقل به اندازه‌ی جمع اعداد ۱ تا ۷ (یعنی ۲۸ ثانیه) زمان لازم است. می‌توان بقیه را طوری چید که این زمان حاصل شود. جدول زیر نمونه‌ای از این چینش‌ها را نشان می‌دهد.

| | | | |
|----|----|----|----|
| ۱۴ | ۱۱ | ۲ | ۱ |
| ۱۲ | ۹ | ۳ | ۱۵ |
| ۱۳ | ۵ | ۴ | ۸ |
| ۷ | ۶ | ۱۶ | ۱۰ |


۱۲- گزینه ۵ درست است.

بهترین راه برای مولین در هر دو مرحله این است که دو عددی که کمترین مجموع را دارند را انتخاب کند و سقف عدد حاصل را بنویسد. مرلون نیز باید دو عددی که بیشتری مجموع را دارند بنویسد و کف عدد حاصل را روی تخته بنویسد. با انجام این کار عدد نهایی که روی تخته می‌ماند ۵۴ است.


۱۳- گزینه‌ی ۱ درست است. 

فرض کنید در جعبه‌ی A_i توپ قرار داشته باشد. چون $a_1 = a_5$ و $a_4 = a_6$ پس a_4 زوج است. داریم:

$$a_1 + a_4 + \frac{a_4}{2} = 20. \quad \text{پس تعداد پاسخ‌ها برابر است با } \binom{22}{2}.$$

۱۴- گزینه‌ی ۳ درست است. 

پس از انجام هر عمل وسط به دو طرف حداقل یک توپ به یکی از جعبه‌های ۲ و ۳ و ۴ منتقل می‌شود، پس یک حالت گوشه‌گیر است اگر و فقط اگر از ابتدا گوشه‌گیر باشد یعنی ۴۱ حالت گوشه‌گیر داریم.


۱۵- گزینه‌ی ۳ درست است. 

وضعیت بی‌حرکت وضعیتی است که در هر کدام از جعبه‌های ۲ و ۳ و ۴ حداکثر یک توپ قرار داشته باشد. بیشترین تعداد گام در حالتی رخ می‌دهد که توپ‌ها در ابتدا همه در جعبه‌ی سوم باشند. حال برای هر حالت مقدار S را اینگونه تعریف کنید: $S = \sum_{i=1}^5 a_i^2$. پس از هر عمل وسط به دو طرف دقیقاً دو واحد به S اضافه می‌شود. از طرفی هنگامی که تمام توپ‌ها در جعبه‌ی سوم باشند، به راحتی مشاهده می‌شود که حالت بی‌حرکت نهایی حالتی است که در آن:


$$a_1 = 19, a_2 = 1, a_3 = 0, a_4 = 1, a_5 = 19.$$

تعداد مراحل برای رسیدن به این حالت برابر است با:

$$\frac{1}{2}(s_{end} - s_{start}) = \frac{514 - 360}{2} = 77$$


۱۶- گزینه‌ی ۳ درست است. 

چون $\{2, 6\}$ و $\{3, 7\}$ دو زوج همزمان هستند، زمانی وجود دارد که ۲، ۳، ۶ در باجه‌ها قرار دارند. در این صورت زوج‌های $\{7, 1\}$ و $\{4, 7\}$ و $\{1, 5\}$ نمی‌توانند همزمان باشند. زوج‌های دیگر را نیز به راحتی می‌توان مشاهده کرد که می‌توانند همزمان باشند.

۱۷- گزینه‌ی ۱ درست است. 

با توجه به شرایطی که در مسئله گفته شده، هر نفر که وارد یک باجه می‌شود، دو زوج همزمان ایجاد می‌شوند و در ابتدا نیز ۱، ۲، ۳ سه زوج همزمان تشکیل می‌دهند. پس مستقل از ترتیب ورود و خروج افراد تعداد زوج‌های همزمان برابر است با:

$$3 + 7 \times 2 = 17$$

۱۸- گزینه‌ی ۱ درست است. 

کمترین مجموع زمانی رخ می‌دهد که در آن ترتیب خروج افراد از باجه‌ها صعودی باشد، در این صورت با اضافه شدن هر سه نفر سه واحد به مجموع اضافه می‌شود و در ابتدا نیز که ۱، ۲، ۳ در باجه‌ها هستند، مجموع برابر ۴ است. پس در کل کمترین مجموع برابر است با: $4 + 7 \times 3 = 25$.

بیشترین مجموع نیز در حالتی رخ می‌دهد که در هر مرحله فردی از باجه خارج شود که بزرگ‌ترین شماره را دارد. در این صورت هنگامی که فرد i وارد می‌شود، مقدار $i - 1 + i - 2$ به مجموع اضافه می‌شود، در این صورت مجموع کلی برابر

$$\sum_{i=1}^9 i + \sum_{j=1}^8 j = 45 + 36 = 81 \text{ می‌شود با:}$$

۱۹- گزینه‌ی ۴ درست است.



زوج‌های $\{1, 3\}$ ، $\{2, 5\}$ و $\{4, 8\}$ را در نظر بگیرید. هر کدام از این زوج‌ها برای ترتیب خروج از باجه ۲ حالت دارند که این دو حالت تأثیری بر ترتیب ورود و خروج بقیه افراد ندارند. از طرفی هنگامی که دو نفر دهم می‌خواهد وارد شود، ۳ حالت برای نفری که از باجه خارج می‌شود می‌توان در نظر گرفت. پس در کل $2 \times 2 \times 2 \times 3$ برای ترتیب قرار گرفتن افراد در باجه‌ها داریم.

۲۰- گزینه‌ی ۴ درست است.



تمامی اعداد ۰ تا ۲۰ را می‌توان تولید نمود.

۲۱- گزینه‌ی ۵ درست است.



گزینه‌ی ۱ درست است با حذف یکی از چوب‌کبریت‌ها ۱۰ مسیر حذف می‌شود و می‌توان به ۶۰ مسیر معتبر رسید. از طرفی چوب‌کبریت‌های کناری که مجموعاً ۱۲ تا هستند ۱۶ مسیر را حذف می‌کنند و بقیه چوب‌کبریت‌ها حداقل ۱۰ مسیر را حذف خواهند کرد (که مقرون به صرفه نیست آن‌ها را حذف کنیم). می‌توان با حذف ۸ چوب‌کبریت از آن‌ها ۱۰ مسیر را حذف نمود. از طرفی با اضافه کردن ۴ چوب‌کبریت از بین این تا حداکثر ۶ مسیر اضافه می‌شود. پس بیشترین تعداد نیز ۸ عدد است.

۲۲- گزینه‌ی ۴ درست است.



تنها عدد ۲۴۹ را نمی‌توان ساخت و بقیه اعداد قابل تولید هستند. برای هر یک مثالی وجود دارد که آن را به دست می‌آورد.

۲۳- گزینه‌ی ۴ درست است.



در هر بار اجرای برنامه (در حالت کمینه) مجموعاً حرکتی به سمت راست و بالا داریم. در هنگام رسیدن به خانه‌ی بالا راست، باید حداقل ۴ حرکت به چپ و همچنین ۵ حرکت به پایین داشته باشیم و گرنه در یک بار اجرای برنامه در همان نقطه خواهیم ماند. پس حداقل نیاز به ۲۰ حرکت داریم. برنامه‌ی زیر با طول ۲۰ خط ربات را به هدف می‌رساند: ۵ راست، ۶ بالا، ۴ چپ، ۵ پایین.


۲۴- گزینه‌ی ۱ درست است.



گزینه‌ی ۵ درست است. به‌طورکلی برای جدول $n \times n - 1, 2n - 1$ حرکت کمترین تعداد حرکت لازم است. در صورتی که در یکی از جهت‌ها $n - 1$ حرکت نداشته باشیم، پس از اجرای یک بار برنامه هر دو گوشه‌ی جدول خالی هستند و ما جابجا شده‌ایم. بدین ترتیب با توجه به اینکه در نهایت به کدام سمت رفته باشیم یکی از گوشه‌ها خالی خواهد ماند. در نتیجه باید در

یکی از جهت‌ها $n-1$ حرکت داشته باشیم و اگر در جهت عکس آن کمتر حرکت داشته باشیم همچنان یک سطر یا ستون خالی خواهد ماند. پس در کل $2n-2$ حرکت خواهیم داشت که برای اینکه بتوانیم تمامی جدول را پیمایش کنیم باید در یک جهت دیگر حداقل یک حرکت داشته باشیم که برابر $2n-1$ می‌شود. با روش زیر نیز می‌توان با این تعداد حرکت به جواب رسید:

$n-1$ راست، $n-1$ چپ، ۱ بالا.

۲۵- گزینه‌ی ۱ درست است. 

به‌طور کلی برای هر جدولی، تمامی خانه‌ها خوب هستند. فرض کنید خانه‌ای که می‌خواهیم ثابت کنیم خوب است، در ستون k ام جدول قرار داشته باشد. در این صورت برنامه‌ی زیر تمام خانه‌ها به جز این خانه را طی می‌کند:

K راست، ۱ بالا، $n-k$ راست، ۱ پایین، $n-k$ چپ، ۱ بالا، k چپ.

پاسخ سوالات تشریحی مرحله‌ی دوم بیست و چهارمین المپیاد کامپیوتر ایران

۱- بازی رنگی

الف) پس از رنگ‌آمیزی دایره‌ی شماره ۱ توسط بیعی، طبق اصل لانه کبوتری رنگی وجود دارد که دست‌کم n قطاع، به آن رنگ درآمده باشد. اگر این رنگ، نارنجی، زرد یا بنفش باشد، به ترتیب کافی است گاوی تمام قطاع‌های دایره‌ی شماره ۲ را به رنگ نارنجی، بنفش یا زرد در بیاورد. با این کار در دایره‌ی شماره ۳ دست‌کم n قطاع نارنجی تولید خواهد شد.

ب) در ابتدا بیعی برای هر رنگ، n قطاع از دایره‌ی شماره ۱ انتخاب می‌کند و آن‌ها را به رنگ در می‌آورد. فرض کنید گاوی در رنگ‌آمیزی خود، x قطاع به رنگ زرد، y قطاع به رنگ بنفش و $n - x - y$ قطاع را به رنگ نارنجی درآورده باشد. $3n$ انتخاب ممکن برای چرخش دایره‌ی شماره ۲ برای بیعی وجود دارد. تعداد قطاع‌های نارنجی‌ای که در مجموع این $3n$ حالت در دایره‌ی شماره ۳ پدید خواهند آمد برابر است با:

$$(x \times n) + (y \times n) + ((n - x - y) \times n) = 3 \times n^2$$

پس طبق اصل لانه کبوتری، انتخابی برای بیعی وجود دارد که در آن حالت دست‌کم

$$\left\lfloor \frac{3n^2}{3n} \right\rfloor = n$$

قطاع از دایره‌ی شماره ۳ به رنگ نارنجی دربیاید.

۲- وزنه‌ها و ماشین جادویی

به‌وضوح هنگام استفاده از ماشین اگر مجموع وزن دو سکه طبیعی بود، یعنی دو سکه هم نوع هستند و در غیر این صورت یعنی هم نوع نیستند. پس می‌توان عمل استفاده از ماشین را یک عمل مقایسه نامید که در پایان آن می‌توان فهمید دو سکه‌ی گذاشته شده، هم نوع هستند یا خیر.

الف) با استقرار روی n ثابت می‌کنیم گاوی با حداکثر $2n - 1$ بار استفاده از ماشین جادویی می‌تواند یک سکه‌ی نیم-گرمی از بین $3n$ سکه، پیدا کند.

برای پایه، $n = 3$ را در نظر می‌گیریم. با کمی حالت بندی می‌توان نشان داد با حداکثر ۵ حرکت می‌توان سکه‌ای نیم-گرمی را مشخص کرد.

حال فرض می‌کنیم حکم برای $n = k$ برقرار باشد؛ ثابت می‌کنیم حکم برای $n = k + 1$ نیز برقرار است. برای اثبات حکم، $3k + 3$ سکه را در نظر می‌گیریم. ۲ سکه را باهم مقایسه می‌کنیم. دو حالت می‌توان متصور بود:

- اگر متفاوت بودند، کافی است یکی از آن‌ها (x) را برداشته و با ۳ سکه‌ی دیگر مقایسه کنیم. اگر در این ۳ مقایسه، دست‌کم ۲ تا از آن‌ها به‌تساوی کشید، یعنی x سکه‌ای ۱-گرمی است و سکه‌ی مقابل در مقایسه‌ی نخست، نیم-گرمی است؛ در غیر این صورت x سکه‌ای نیم-گرمی است.

- اگر برابر بودند، یکی از آن‌ها را برداشته و با سکه‌ای دیگر مقایسه می‌کنیم. اگر باز هم برابر بودند، یعنی این ۳ سکه، ۱-گرمی هستند و برای بقیه‌ی سکه‌ها، طبق فرض استقرا می‌توان کار را انجام داد؛ اما اگر این ۲ برابر نبودند، کافی است باز هم ۳ سکه‌ی دل‌خواه دیگر انتخاب کنیم و مانند حالت قبل، کار را انجام دهیم.

ب) ابتدا ثابت می‌کنیم هر گراف ساده‌ی n رأسی با k مؤلفه، دست‌کم $n - k$ یال دارد. ابتدا یال‌ها را در نظر نمی‌گیریم و یکی پس از دیگری، یال‌ها را می‌گذاریم. هر یالی که می‌گذاریم، حداکثر یکی از تعداد مؤلفه‌ها کم می‌کند. پس گراف n رأسی با k مؤلفه، دست‌کم $n - k$ یال دارد.

فرض کنید گاوی با تعدادی مقایسه، سکه‌ای نیم-گرمی را پیدا کرده باشد. گرافی ساده با $3n$ رأس می‌سازیم که هر رأس آن یک سکه باشد و بین دو رأس، یال می‌کشیم اگر و تنها اگر گاوی بین سکه‌های متناظر آن‌ها، مقایسه انجام داده باشد. ابتدا ثابت می‌کنیم این گراف حداکثر ۲ مؤلفه‌ی ۱ رأسی دارد. فرض می‌کنیم دست‌کم ۳ مؤلفه‌ی ۱ رأسی داشته باشد. در این صورت اگر سکه‌های نیم-گرمی در بین این ۳ رأس باشند، نمی‌توان با اطمینان یک سکه‌ی نیم-گرمی را تشخیص داد. حال ثابت می‌کنیم این گراف حداکثر ۱ مؤلفه‌ی ۲ رأسی دارد. مانند قسمت قبل فرض کنید دست‌کم ۲ مؤلفه‌ی ۲ رأسی داشته باشیم. اگر سکه‌های نیم-گرمی در بین این ۴ رأس باشند، نمی‌توان با اطمینان یک سکه‌ی نیم-گرمی را تشخیص داد. حال ثابت می‌کنیم امکان ندارد هم مؤلفه‌ی ۲ رأسی داشته باشیم و هم ۲ مؤلفه‌ی تک رأسی وجود داشته باشد. فرض کنید هم مؤلفه‌ی ۲ رأسی داشته باشیم و هم ۲ مؤلفه‌ی تک رأسی وجود داشته باشد. در این صورت اگر سکه‌های نیم-گرمی در بین این ۴ سکه باشند، باز هم اطمینان نمی‌توان سکه‌ای نیم-گرمی را پیدا کرد.

حال اگر در گراف مورد نظر، ۲ مؤلفه‌ی تک رأسی داشته باشیم، گراف ما حداکثر

$$\left\lfloor \frac{3n-2}{3} \right\rfloor + 2 = n + 1$$

مؤلفه دارد؛ در غیر این صورت نیز گراف ما حداکثر

$$\left\lfloor \frac{3n-3}{3} \right\rfloor + 1 + 1 = n + 1$$

مؤلفه خواهد داشت. پس گراف ما دست‌کم $3n - (n + 1) = 2n - 1$ یال لازم دارد که حکم مسئله را ثابت می‌کند.

۲- گاوی خسیس

کشور مورد نظر را به گراف مدل کنید. به‌جای هر شهر یک رأس و به‌جای هر جاده یک یال در نظر بگیرید. ارزش یک شهر برابر با درجه رأس متناظر آن است. هزینه یک مسیر نیز برابر است با مجموع درجات رأس‌های داخل مسیر.

الف) یک گراف کامل را در نظر بگیرید. یال بین دو رأس a و b را از این گراف جدا کنید. حال بیعی را در رأس a و گاوی را در رأس b قرار دهید. اکنون هزینه سفر برابر است با:

$$n - 2 + n - 2 + n - 1 = 3n - 5$$

ب) فرض کنید بیعی در رأس a و گاوی در رأس b است. کوتاه‌ترین مسیر را از a به b در نظر بگیرید. به جز یال‌های خود مسیر بین هیچ دو رأسی یال نخواهیم داشت چون اگر یال باشد مسیر کوتاه‌تر می‌شود. هر رأس خارج از مسیر نیز حداکثر سه یال به رأس‌های داخل مسیر دارد، چون در غیر این صورت دوباره مسیر کوتاه‌تری می‌توانستیم پیدا کنیم. حال مجموع درجات رأس‌های داخل مسیر را می‌شماریم. به ازای هر سال داخل مسیر به مجموع دو واحد اضافه می‌شود. به ازای هر سال از یک رأس خارج از مسیر به یک رأس داخل مسیر هم یک واحد به مجموع درجات اضافه می‌شود. اگر تعداد رأس‌های درون مسیر k باشد، هزینه کل ما حداکثر برابر با:

$$2 * (k - 1) + 3 * (n - k) = 3n - k - 2$$

اگر $k > 2$ باشد که سؤال حل است. در غیر این صورت مسیر ما فقط متشکل از دو رأس بوده است که هر کدام حداکثر می‌توانستند درجه‌ای حداکثر برابر با $n-1$ داشته باشند. پس در آن صورت هزینه کل ما برابر با $2n-2$ می‌شد که با توجه به اینکه $n > 2$ است، $2n-2 \geq 3n-5$ است.

۳- انتقال مهره‌های گاوی

جواب ماشین گاوی را در نظر بگیرید. چون در ماشین او در یک لحظه می‌تواند در یک خانه بیش از یک مهره باشد، پس می‌توان فرض کرد که اگر مهره‌ای با مختصات (x_1, y_1) را بخواهیم و به نقطه‌ای با مختصات (x_p, y_p) انتقال دهیم، می‌توانیم ابتدا این مهره را به نقطه‌ی (x_1, y_1) برده و سپس آن را به خانه‌ی (x_p, y_p) ببریم. به حرکات موجود در انتقال اول، حرکت عمودی و به حرکات موجود در انتقال دوم حرکت افقی می‌گوییم. به عبارتی ابتدا مهره را با تعدادی حرکت عمودی به سطر مورد نظر انتقال می‌دهیم و سپس با تعدادی حرکت افقی به ستون مورد نظر می‌بریم. همچنین به هر مهره زوج مرتب (c, d) را نسبت دهید که در آن c به معنای تعداد حرکت‌های عمودی لازم برای این نقطه و d برابر با تعداد حرکت‌های افقی لازم به ازای این نقطه است.

لم ۱

به ازای یک بعد سؤال درست است. فرض کنید دو مهره در مسیر حرکت خود باهم برخورد داشته باشند (مثل مهره‌های a و b که a می‌خواهد به خانه‌ی A برود و b به خانه‌ی B). مقصد این دو مهره را باهم عوض کنید a به B برود و b به A برود). با این کار حداقل یک واحد از تعداد برخوردها کاسته می‌شود. در ضمن می‌دانیم با این کار جواب ما از حالت قبلی‌اش بیش‌تر نمی‌شود. این کار را آن‌قدر تکرار کنید که دیگر برخوردی نداشته باشیم. پس جواب ماشین بیعی و گاوی به ازای یک بعد برابر است.

حل نصف نمره

به ازای مهره i ام $e_i (1 \leq i \leq n)$ را برابر $ax(c_i, d_i)$ تعریف کنید. حال فرض کنید $F = \max_{i=1}^n (e_i)$. واضح است که $t_i \geq F$ است. حال جواب ماشین گاوی را در نظر بگیرید. طبق لم ۱، ماشین گاوی می‌تواند به ما جوابی بدهد که هیچ برخوردی بین دو مهره که در حال انجام حرکات عمودی خود هستند رخ ندهد. حال هر مهره‌ای، حرکت عمودی خود را انجام دهد و صبر کند تا تمامی مهره‌ها حرکت‌های عمودی خود را انجام دهند. سپس هر مهره‌ای حرکت افقی خود را انجام دهد. اکنون هرکس به خانه‌ی مورد نظر خود رسیده است. حال خواهیم داشت

$$t_p \leq \max(c_i) + \max(d_i) \leq F + F \leq 2t_1$$

حل کامل

از بین جواب‌های موجود برای ماشین گاوی جوابی را در نظر بگیرید $\sum_{i=1}^n C_i^2$ در آن کمینه شود. می‌خواهیم ثابت کنیم که اگر همچنین جوابی را در نظر بگیریم، در هیچ لحظه‌ای دو مهره در یک خانه نخواهند بود. فرض کنید دو مهره در یک ستون باشند و هنگامی که حرکت عمودی انجام می‌دهند به یک نقطه برسند. فرض کنید مهره‌ی a بخواهد به نقطه‌ی A انتقال یابد و مهره‌ی b نیز به خانه‌ی B انتقال یابد. حال مهره‌ی a را به نقطه‌ی B انتقال دهید و مهره‌ی b را به خانه A . c_a و c_b هر دو کم‌تر شده است چون هیچ دو نقطه‌ی آبی‌ای در یک سطر نیستند. پس مجموع مورد نظر ما کم‌تر شده است. حال فرض کنید دو مهره از دو ستون مختلف به هم برخورد کنند. در این صورت یکی از آن‌ها در حال انجام حرکت عمودی خود بوده است و

دیگری در حال انجام حرکت افقی خود، زیرا اولاً هیچ دو نقطه آبی‌ای در سطر یکسانی نیستند، ثانیاً این دو مهره در یک ستون نبودند و قرار بود هر مهره‌ای که می‌خواهد به مقصد خود برود، اول حرکات عمودی‌اش را انجام دهد، سپس حرکات افقی‌اش را. اکنون مقصد این دو مهره را باهم عوض کنید. از آنجایی که این دو مهره در یک زمان در یک نقطه بوده‌اند و همچنین یکی از آن‌ها در حال حرکت افقی بوده و دیگری در حال حرکت عمودی، پس جواب ما بیشتر نشده است. همچنین اثبات می‌کنیم که مجموع مورد نظر ما کمتر شده است. اگر جهت حرکت‌های این دو مهره باهم متفاوت باشد که از c هر دوی آن‌ها کاسته شده است پس مجموع نیز کمتر شده است (دقت کنید نقطه‌های نهایی در یک سطر نیستند). حال اگر جهت حرکت این دو مهره یکسان باشد، بدون این که از کلیت سؤال کاسته شود فرض کنید که جهت حرکت هر دوی آن‌ها به بالا بوده باشد. حال این مهره‌ها را با ۱ و ۲ نشان دهید. همچنین فرض کنید:

$$c_1 < c_2 \Rightarrow y_1 > y_2$$

$$p = c_2 + y_2 - (c_1 + y_1)$$

حال قرار است مهره ۱، $c_1 + p$ حرکت عمودی انجام دهد و مهره ۲، $c_2 + p$ حرکت عمودی انجام دهد. مجموع ما به اندازه‌ی $2p(c_1 + p - c_2)$ اضافه می‌شود. داریم:

$$2p > 0$$

$$c_1 + p - c_2 = y_2 - y_1 < 0$$

پس $2p(c_1 + p - c_2) < 0$ است و مجموع ما کمتر شده است. پس اگر مجموع ما کمینه شود، ماشین به ما جوابی را می‌دهد که در هیچ لحظه‌ای دو مهره در یک نقطه نباشند که این همان خواسته‌ی ماشین بیعی است.